Компьютерные инструменты в образовании, 2024
№ 1: 5–17
УДК: 517.93
http://cte.eltech.ru
doi:10.32603/2071-2340-2024-1-5-17

алгоритмическая математика и математическое моделирование

О МЕТОДАХ ИССЛЕДОВАНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Ампилова Н. Б.[1], канд. физ.-мат. наук, доцент, ✉ n.ampilova@spbu.ru
Соловьев И. П.[1], канд. физ.-мат. наук, доцент, soloviev@math.spbu.ru
Кадомский А. А.[1], аспирант, st099001@student.spbu.ru

[1]Санкт-Петербургский государственный университет,
Университетский пр., д. 28, Петергоф, 198504, Санкт-Петербург, Россия

Аннотация

Широкое применение динамических систем привело к созданию достаточно большого числа различных методов их исследования, как аналитических, так и компьютерно-ориентированных. В данной работе мы рассмотрим ряд методов, основанных на идеях символической динамики, а также остановимся на применении динамических систем для решения задач идентификации и прогноза.

Представление динамики системы с помощью ориентированного графа, построенного по системе и конечному разбиению фазового пространства, дает возможность сопоставить траекториям системы пути на графе. С помощью такого представления решаются задачи построения приближений к инвариантным множествам, спектру Морса и аппроксимации инвариантных мер. Применение динамических систем в задачах идентификации рассматривается на примерах вероятностных цепочек, позволяющих моделировать распределение различных социально-экономических ресурсов, и метода нелинейной динамики для восстановления аттрактора системы по временному ряду.

Ключевые слова: *динамические системы, символическая динамика, символический образ, спектр Морса, инвариантные меры, стационарный поток на графе, метод Такенса, вероятностные цепочки.*

Цитирование: Ампилова Н. Б., Соловьев И. П., Кадомский А. А. О методах исследования динамических систем // Компьютерные инструменты в образовании. 2024. № 1. С. 5–17. doi:10.32603/2071-2340-2024-1-5-17

1. ВВЕДЕНИЕ

Динамические системы представляют весьма широкий класс моделей для изучения сложных процессов, возникающих в различных областях знаний. Непрерывные системы описываются автономными системами дифференциальных уравнений, дискретные — системами разностных уравнений. Изучение таких систем включает как аналитические, так и численные методы. Быстрое развитие вычислительной техники способствовало выделению отдельного направления в исследовании динамических систем, а именно компьютерного моделирования.

Решаемые задачи можно условно разделить на прямые и обратные. При решении прямых задач мы работаем с некоторой математической моделью и исследуем изменение ее качественного поведения в зависимости от изменения параметров. В обратных задачах по заданным начальным данным, представленным временным рядом, определяем возможную систему, которая могла сгенерировать этот ряд. Есть два возможных подхода: а) найти подходящую математическую модель и путем подбора коэффициентов добиться хорошей аппроксимации; б) построить характеристику изучаемого процесса без описания математической модели. Вариант второго подхода дает хорошо известный метод Такенса, который строит приближение к аттрактору системы (если он существует).

Одной из основных характеристик динамики системы являются ее инвариантные множества, то есть такие множества в фазовом пространстве, которые остаются в заданной области при действии системы. Простейшие примеры — неподвижные точки и периодические траектории. Инвариантные множества могут иметь довольно сложную структуру, поэтому их приближенное построение является наиболее часто решаемой задачей. Самый простой и универсальный способ состоит в итерациях точек выбранной области с целью выявить те, которые остаются в ней после достаточно большого числа итераций. Конечно, при этом локализуется не все инвариантное множество, потому что алгоритм не гарантирует выявление точек со сложным типом возвращаемости. Пример более сложного алгоритма — метод обратных итераций для построения инвариантных множеств рациональных преобразований плоскости (множеств Жюлиа).

Большое влияние на развитие компьютерных методов исследования динамических систем оказали идеи символической динамики, описывающей поведение траекторий на конечном покрытии выбранной области в фазовом пространстве с помощью последовательностей символов. Получили развитие алгоритмы прикладной символической динамики [1–3], позволяющие строить приближения к фазовому портрету путем последовательных подразбиений. Для иллюстрации переходов траектории между элементами разбиения использовался неориентированный мультиграф.

Естественным обобщением и развитием этого подхода является метод символического образа, предложенный и разработанный Г. Осипенко [4]. Символическим образом динамической системы называется ориентированный граф, построенный определенным образом по системе и конечному покрытию фазового пространства. Вершины графа соответствуют ячейкам разбиения, а дуги кодируют допустимые переходы между ячейками. Пути на графе — это последовательности над алфавитом над индексами ячеек разбиения, один шаг по системе соответствует сдвигу последовательности на один символ влево. Фактически матрица переходов является матрицей инциденций для построенного графа, а символический образ является топологической марковской цепью. Доказано, что при построении последовательности символических образов, полученных с помощью адаптивного подразбиения, мы получаем приближение к фазовому портрету с точностью, не меньшей чем диаметр покрытия. С помощью этого метода удалось решить ряд важных задач в исследовании динамики как дискретных так и непрерывных систем. Были разработаны и реализованы алгоритмы локализации инвариантных множеств, построения спектра Морса, а также построения инвариантных мер.

В данной работе мы сначала расскажем более подробно о решении этих задач, а затем обсудим два метода компьютерного моделирования для решения обратных задач — вероятностные цепочки, применимые к моделированию и прогнозированию процессов распределения различных социально-экономических ресурсов и метод Такенса, позволяющий восстановить аттрактор системы по порожденному ей временному ряду.

2. ЛОКАЛИЗАЦИЯ ИНВАРИАНТНЫХ МНОЖЕСТВ

Нужно отметить, что при реализации численных методов исследования динамических систем мы получаем дискретные системы и работаем с приближенными траекториями. Это означает, что некоторая последовательность точек $\beta = \{x_k\}$ может рассматриваться как ε-траектория для динамической системы f, если для любого k $dist\big(f(x_k), x_{k+1}\big) < \varepsilon$. Далее мы используем термин ε-траектория для обозначения приближенных траекторий.

Понятие приближенной траектории позволяет определить и характеристику приближения к инвариантному множеству при реализации алгоритмов локализации. А именно, точка x называется цепно-рекуррентной для некоторой системы, если для любого положительного ε существует периодическая ε-траектория, проходящая через x. Множество цепно-рекуррентных точек образует цепно-рекуррентное множество. Оно замкнуто, инвариантно и содержит возвращающиеся траектории всех типов: периодические, почти периодические и другие. Таким образом, при компьютерной локализации инвариантных множеств мы фактически строим цепно-рекуррентные множества.

Достаточно универсальный алгоритм для решения задачи локализации дает метод символического образа. Переход к ориентированному графу в схеме кодирования позволил применять для исследования динамики системы многие алгоритмы на графах. При выбранном представлении траекториям системы соответствуют пути на символическом образе, при этом периодическим траекториям соответствуют периодические пути. Точность построения приближенных траекторий может быть оценена через параметры символического образа, основным из которых является диаметр покрытия. Все вершины символического образа можно разбить на классы эквивалентности, при этом такое разбиение соответствует разбиению на компоненты сильной связности. Таким образом, можно локализовать цепно-рекуррентные множества исходной системы на каждой компоненте: цепно-рекуррентное множество системы локализуется как объединение компонент сильной связности на графе символического образа.

Для выделения компонент сильной связности обычно используется хорошо известный алгоритм Тарьяна. Алгоритм основан на обходе графа в глубину и использует два стека — «стек» и «маршрут». Стек «маршрут» содержит путь от начальной вершины до текущей. Каждая новая исследуемая вершина опускается в стек «маршрут», а при возвратах извлекается. В «стек» добавляются все просмотренные вершины. Все элементы найденной компоненты сильной связности удаляются после ее окончательного формирования. Алгоритм имеет линейную по числу вершин и дуг сложность.

Таким образом, поиск приближений к инвариантным множествам, как наиболее часто решаемая задача, получает простое и элегантное решение.

3. ОЦЕНКА СПЕКТРА МОРСА

Спектром Морса динамической системы называется предельное множество показателей Ляпунова ε-траекторий. Ф. Колониус и В. Клейман [5] показали, что спектр Морса совпадает с периодическим спектром Морса, иначе говоря, нужно учитывать показатели Ляпунова только для периодических ε-траекторий. Эта характеристика особенно важна, когда динамическая система имеет бесконечно много периодических траекторий большого периода. Оценка спектра Морса позволяет проверить [6] устойчивость цепно-рекуррентного множества при малом возмущении системы и определять области существования устойчивых режимов при изменении параметров и правых частей. Показатель Ляпунова для траектории системы определяется, согласно [6], одномерным подпространством, натянутым на единичный вектор в касательном пространстве. Такой вектор можно рассматривать как точку в проективном пространстве.

Рассмотрим дискретную динамическую систему, порожденную гомеоморфизмом $f : R^n \to R^n$ и ее компактное инвариантное множество Λ.
Пусть P^1 — одномерное вещественное проективное пространство.
Рассмотрим множество $T\Lambda = \Lambda x P^1$ и динамическую систему Φ: $T\Lambda \to T\Lambda$.
Для точки (x, v) из $T\Lambda$ определим число $a(x, v) = |Df(x)v|$. Рассмотрим $\xi = (x_k, v_k)$ — псевдотраекторию системы Φ из ее цепно-рекуррентного множества, фиксируем натуральное m и вычислим величину $\lambda(m,\xi) = 1 \Big/ m \sum_{k=1}^{m-1} \log a(x_k, v_k)$. Множество предельных значений этих величин при m стремящемся к бесконечности называется спектром Морса динамической системы на цепно-рекуррентном множестве.
Таким образом, рассматривается расширенная динамическая система, фазовое пространство которой состоит из пар вида (x, v), где x — точка исходного пространства, а v — проективного. Первая компонента расширенной системы действует аналогично исходной, а вторая «поворачивает» вектора действием дифференциала исходной системы в точке. В результате мы следим не только за точками траекторий, но и за изменением касательных векторов в этих точках.

В работе [7] был предложен способ оценки спектра Морса динамической системы с помощью спектра Морса ее оснащенного символического образа, то есть графа, дугам которого присвоены некоторые числовые характеристики. Граф разбивается на компоненты сильной связности, на каждой компоненте выделяются контуры с максимальной и минимальной характеристиками. Спектр Морса оснащенного символического образа состоит из объединения интервалов, границы которых определяются экстремальными характеристиками, полученными на компонентах. При таком подходе вычисление спектра Морса связано с поиском простых замкнутых путей и выделением среди них контуров с нужными характеристиками. К сожалению, при итерационных построениях символического образа с увеличением размера графа число таких путей резко возрастает, что приводит к колоссальным затратам памяти и времени.

В работе [8] был рассмотрен алгоритм построения контуров с наибольшим и наименьшим значениями характеристик, который был реализован в [9] применительно к задаче вычисления спектра Морса. Спектр Морса может быть использован для проверки устойчивости цепно-рекуррентного множества системы: эквивалентным условием устойчивости является отсутствие нуля в спектре.

Важно отметить, что при решении этой задачи соединение прикладной символической динамики и компьютерных методов позволило разработать практический алгоритм для построения приближений к сложной теоретической характеристике.

4. ПОСТРОЕНИЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ К ИНВАРИАНТНОЙ МЕРЕ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Построение инвариантной меры для динамической системы является нетривиальной задачей. Динамическая система может иметь много инвариантных мер, поэтому нужно выбирать те, которые интересны с точки зрения динамики. Поскольку символический образ является конечной аппроксимацией системы, возникает задача о построении инвариантной меры на символическом образе, что, в свою очередь, приводит к построению стационарного процесса (замкнутого нормированного потока) на ориентированном графе.

Нужно отметить, что в качестве начального распределения на дугах выбираются значения дифференциала отображения, вычисленные в центрах ячеек: дуге $i \to j$ приписывается значение дифференциала в центре ячейки с индексом i. Поэтому построенное распределение можно рассматривать скорее как некую функцию плотности, а по полученному потоку доопределить меру на ячейках.

В работе [10] был реализован алгоритм построения стационарного потока на символическом образе, основанный на построении мер простых циклов. При этом меру можно задать либо на каждой компоненте, а на всем графе определить как выпуклую комбинацию мер на компонентах, либо задавать ее на всем графе. Такой подход, хотя и является достаточно простым, приводит, как и в задаче нахождения спектра Морса, к понятным трудностям в реализации: число простых циклов может быть очень велико. Если допускать оптимизацию, то некоторые циклы могут быть не найдены. Вопрос о том, насколько «потерянные» циклы важны для динамики системы, проверяется только экспериментально.

И. В. Романовский предложил использовать такой метод построения нормированного замкнутого потока на графе, при котором всем дугам приписывается некоторая мера, так что поток является максимально «размазанным». Впервые этот алгоритм использовал Г. В. Шелейховский при решении специальной транспортной задачи. Начальные значения выбираются произвольно, а затем улучшаются методом балансировки строк и столбцов матрицы распределения потоков. Известно, что решение существует, если на графе есть циклы [11]. Л. М. Брэгман [11] доказал сходимость этого метода, независимость результата от порядка выбора строк и столбцов, а также обобщил метод Шелейховского на класс задач, ограничения которых не являются линейными [12]. Алгоритм построения приближения к инвариантной мере на графе символического образа с помощью метода балансировки был реализован в работе [13].

Наиболее интересным является вопрос о том, как связаны инвариантные меры на графе символического образа с инвариантными мерами исходной системы. Г. С. Осипенко в [14] получил следующий результат.

Для любой окрестности (в слабой топологии) U множества f-инвариантных мер $M(f)$ найдется положительное число d_0 такое, что для всякого разбиения C с максимальным диаметром $d < d_0$ и любого потока m на символическом образе G, построенного относительно разбиения C, мера μ, построенная определенным образом по m, лежит в окрестности U.

Иными словами, поток, построенный для достаточно мелкого разбиения, хорошо аппроксимирует некоторую инвариантную меру исходной системы.

5. ПОСТРОЕНИЕ ИНВАРИАНТНОЙ МЕРЫ ДЛЯ ЦИФРОВЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Идея графического представления динамики сложных процессов, например процесса диффузии, может быть применима и к анализу цифровых изображений. Ориентированный граф строится по изображению следующим образом. Каждому пикселю с номером i ставится в соответствие вершина графа с весом I_i (мерой), равным интенсивности пикселя. Из каждой вершины проводятся дуги к ближайшим соседям (4 в случае окрестности Мура или 8 для окрестности фон Неймана). При этом мера p_{ij} дуги из вершины i

в вершину j равна мере вершины, деленной на число соседей. Таким образом, каждой дуге приписывается вес, определяемый как мера начальной вершины, деленная на число выходящих из нее дуг, а мера вершины равна сумме мер этих дуг. Полученное распределение нормируется так, чтобы сумма весов на всех дугах была равна 1. В результате мы получаем марковскую цепь, а поток p_{ij} описывает начальное состояние некоторого процесса. Напомним, что распределение называется стационарным, если для каждой вершины сумма мер входящих дуг равна сумме мер выходящих.

Нашей задачей является построение стационарного распределения $u = \{u_{ij}\}$ для построенной марковской цепи. На стационарном распределении достигается максимум расхождения Кульбака-Лейблера $v = -\sum_{ij} u_{ij} \ln \frac{p_{ij}}{u_{ij}}$ (называемый также взвешенной энтропией). Величина взвешенной энтропии может быть использована как классификационный признак при анализе цифровых изображений [15, 16].

Метод был реализован как в базовом варианте (вершина соответствует пикселю), так и для нескольких вариантов оптимизации. Так, в работе [16] А. Батюков рассматривал параллельный алгоритм построения стационарных потоков на частях изображения и исследовал зависимость времени работы от числа элементов такого разбиения и числа ядер процессора. В случае одного ядра время удавалось сократить в среднем в 3 раза.

В работе [17] в качестве вершины графа выбиралась ячейка разбиения изображения. Предложенная оптимизация позволила сократить время вычислений в 4–5 раз по сравнению с базовым вариантом без использования параллельных вычислений. Оптимизация представления исходных данных была реализована В. Сергеевым [18]. Метод показал хорошие результаты как для изображений, иллюстрирующих диффузионные процессы, так и для более сложных структур.

6. ВЕРОЯТНОСТНЫЕ ЦЕПОЧКИ

Рассмотрим пример решения обратной задачи. По заданным статистическим данным о распределении некоторого ресурса между участниками построить математическую модель процесса и на ее основании построить прогноз. Распределение указывается в относительных долях. Такие модели, описывающие преобразование вероятностных векторов, были предложены и разработаны М. Сонисом и Д. Хьюинсом [19–22] и получили название вероятностных цепочек. Они представляют собой дискретные динамические системы, определенные на симплексе вероятностных векторов. Авторы рассматривали цепочки с различными функциями, задающими вид правой части системы: логистические, линейно-логарифмические, рационально-линейные, линейные (цепи Маркова), полиномиальные (со специальным видом полиномов), рационально-полиномиальные, а также квазивероятностные цепочки. Эффективность применения этих моделей в общественных науках и экономике была показана в работах [23–25].

Дискретная вероятностная $(1, n)$-цепочка — это последовательность вероятностных векторов вида:

$$\begin{pmatrix} p_{1t} \\ \dots \\ p_{nt} \end{pmatrix}, \quad t = 0, 1, \dots; \quad 0 \le p_{kt} \le 1, \quad \sum_{k=1}^{n} p_{kt} = 1.$$

Эмпирические данные в некоторый момент времени могут быть представлены в виде вероятностных векторов, совокупность которых образует дискретную вероятностную цепочку. Для моделирования таких данных мы рассматривали дискретные системы вида

$$p_{k,t+1} = \frac{P_k(p_0,\dots,p_t)}{\sum_{i=1}^{n} P_i(p_0,\dots,p_t)},$$

где $P_k(p_0,\dots,p_t)$ — строго положительная порождающая функция, и $k = 1,\dots,n,\ \ t = 0,1,\dots$

Наиболее употребительны следующие виды вероятностных цепочек:

а) Вероятностные цепочки с логистическим ростом

$$P_k(p) = \gamma_k p_k, \quad k = 1,2,\dots,n,$$

где $\gamma_k > 0$ — определяемые по исходным данным коэффициенты.

б) Линейно-логарифмические вероятностные цепочки

$$P_k(p) = A_k p_1^{a_{k1}} p_2^{a_{k2}} \dots p_n^{a_{kn}}, \quad -\infty \le a_{kj} \le +\infty, \quad A_k > 0, \quad k = 1,\dots,n,$$

где $A_1,\dots,A_n$ и элементы матрицы $[a_{ij}]_{i,j=1}^{n}$ — параметры, определяемые в контексте задачи.

в) Вероятностные цепочки с полиномиальным ростом

$$x_{kt+1} = X_k(x_{1t}, x_{2t},\dots,x_{nt}), \quad 1 \le k \le n.$$

Функции, описывающие преобразование исходных данных, задаются полиномами X_i, так что $\sum_{i=1}^{n} X_i(x_{1t}, x_{2t},\dots,x_{nt}) \equiv 1$ и $\sum_{i=1}^{n} x_{it} = 1$, для любого t.

Используются полиномы удовлетворяющие условию

$$1 = (x_{1t} + x_{2t} + \ldots + x_{nt})^m.$$

Моделирование состоит в подборе коэффициентов модели так, чтобы минимизировать квадратичное отклонение между модельной и эмпирической траекториями. Для линейно-логарифмических цепочек параметры вычисляются с помощью трехшагового метода наименьших квадратов.

Проведенные эксперименты показывают, что хороший прогноз дают логарифмически линейные и полиномиальные цепочки, хотя во многих случаях и цепочки с логистическим ростом показывают правдоподобный результат. Результаты исследований приведены в [26–30].

Наиболее интересный вопрос возникает при исследовании связей сложной динамики модельной системы и полученного прогноза. Провести аналитический анализ динамики поведения модели в цепочках типа б) и в) достаточно сложно, поэтому можно использовать устойчивость в первом приближении, а именно посмотреть характер устойчивости неподвижных точек (если они есть). Если особенностей нет, то надежность прогноза оценивается по статистическим критериям. В случае существования особенностей нужно более подробно рассмотреть связь поведения с прогнозированного отрезка эмпирической траектории с характером неподвижной точки.

Заметим, что эмпирические данные являются некоторой приближенной траекторией модельной системы. Эта траектория может попадать в окрестность неподвижной точки или проходить достаточно далеко от нее. В каждом конкретном случае мы можем только оценить расстояния до этой точки. Тем не менее результаты экспериментов показывают, что в случае существования асимптотически устойчивых неподвижных точек прогноз будет более устойчивым. Для неустойчивых точек поведение модельных траекторий соответствует типу неустойчивости (приближение или удаление от точки по соответствующим направлениям). При отсутствии неподвижных точек в некоторых случаях возникает периодический режим.

7. РЕКОНСТРУКЦИЯ АТТРАКТОРОВ

Метод анализа степенных рядов, основанный на методах нелинейной динамики позволяет восстановить аттрактор системы (если он существует) по временному ряду.

Согласно теореме Уитни, любое N-мерное многообразие класса C^r, где $r > 1$, допускает вложение в R^{2N+1}. Если исходная динамическая система действует на N-мерном многообразии и у нее есть аттрактор, то этот аттрактор можно восстановить в пространстве размерности $2N+1$.

Относительно динамической системы вводятся дополнительные предположения:

а) отображение, задающее систему, имеет гладкость, по крайней мере, класса C^2;

б) разные участки аттрактора посещаются траекториями системы почти с одинаковой вероятностью;

в) длина выборки предполагается достаточной, то есть выполнено условие стационарности.

Рассмотрим $\varphi_t(x)$ динамическую систему порядка n, которая определена на компактном многообразии M размерности N. Временные ряды как запись состояний системы могут быть получены по всем n координатам. Но метод Такенса позволяет провести реконструкцию только по одной координате. Пусть $\varphi_\tau^j(x)$ есть значение j-й компоненты $\varphi_t(x)$ в момент τ. Если у системы есть аттрактор $A \subset M \subset R^n$, его можно восстановить в евклидовом пространстве размерности $2N+1$. Определим отображение F: $M \to R^{2N+1}$ следующим образом

$$F(x) = \left(\varphi_0^j(x), \varphi_\tau^j(x), \ldots, \varphi_{2N\tau}^j(x)\right),$$

где τ — период выборки, а j — координата, по которой про изводится выборка. Составляем вектора из данных временного ряда через интервал τ. По предположению они лежат на M. По теореме Уитни, их образы при отображении F лежат на копии аттрактора A, рассматриваемой как поверхность в R^{2N+1}.

Построим вектора из данных временного ряда как точки в пространстве R^{2N+1}:

$$\begin{aligned}
&z_0 = \left(\varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots, \varphi_{2N}\right),\\
&\ldots,\\
&z_i = \left(\varphi_i(x), \varphi_{i+1}(x), \ldots, \varphi_{i+2N}\right),\\
&z_{K-2N} = \left(\varphi_{K-2N}(x), \varphi_{K-2N+1}(x), \ldots, \varphi_K\right),
\end{aligned}$$

где K — длина сегмента временного ряда. По теореме Такенса типичным свойством отображения F является то, что это вложение M в R^{2N+1}.

Таким образом, системы $\varphi : M \to M$, и $F : M \to R^{2N+1}$ связаны невырожденной заменой переменных $z = F(x)$, так как F является вложением. Следовательно, у этих систем совпадают характеристики, инвариантные относительно такой замены, в частности корреляционная размерность аттрактора. Алгоритм Гроссберга-Прокаччиа позволяет оценить корреляционную размерность и размерность вложения. Именно корреляционная размерность используется как классификационный признак в анализе сигналов.

Этот подход давно и успешно применяется для анализа энцефалограмм. Проблемы, возникающие при анализе этих сигналов, и способы их решения представлены в работах [31–36]. Метод Такенса используется также в геофизике, астрофизике [37], физике, экономике при анализе состояния финансовых рынков [38].

Нелинейная динамика оказалась весьма полезным инструментом при классификации звуковых сигналов квадрокоптеров. При работе с такими устройствами чаще всего используется техника обнаружения по видеозаписи. Этот метод требует хорошей технической оснащенности и невполне эффективен в плохих погодных условиях. При обнаружении квадрокоптеров по звуковым сигналам используют спектрограммы и технику работы с нейронными сетями [39]. Основной недостаток такого подхода состоит в необходимости хранения большого количества данных для обучения нейронной сети. Мы использовали метод Такенса для анализа звуковых сигналов 4 типов квадрокоптеров. Данные были взяты с общедоступного сайта https://hissandaroar.com/v3/soundlibrary/sd024-quadcopter-uav-drone/, записи выполнены с помощью профессионального оборудования. Для каждого устройства была выбрана запись длиной 1 сек и частотой 192000 гц. Каждая запись была разделена на 100 сегментов, таким образом, для каждого устройства анализировалось 100 записей.

Для каждого типа устройств были получены несколько интервалов, в которые попадали корреляционные размерности аттракторов. Таким образом, сигнал длительностью 1 сек моделировался несколькими динамическими системами, которые порождали аттракторы с различными корреляционными размерностями. В отличие от анализа ЭЭГ, здесь в качестве классификационного признака была получена гистограмма распределения корреляционных размерностей. Результаты исследования приведены в [40, 41].

8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Описанные методы направлены на решение задач, связанных с исследованием сложной динамики, и имеют большое практическое значение. Они также являются хорошим учебным материалом по применению динамических систем в компьютерном моделировании.

Список литературы

1. *Hsu C. S.* Cell-to-cell mapping. A method of global analysis for nonlinear systems. New-York: Springer-Verlag, 1987.
2. *Dellnitz M., Hohmann A.* A subdivision algorithm for the computation of unstable man ifolds and global attractors // Num. Math. 1997. Vol. 75. P. 293–317.
3. *Dellnitz M., Junge O.* An adaptive subdivision technique for the approximation of attractors and invariant measures // Comput. Visual. Sci. 1998. Vol. 1. P. 63–68.
4. *Осипенко Г. С.* О символическом образе динамической системы. Граничные задачи. Пермь, 1983. С. 101–105.
5. *Colonius F., Kliemann W.* The Dynamics of Control. Birkhauser, 2000.
6. *Осипенко Г. С., Ампилова Н. Б.* Введение в символический анализ динамических систем. СПб.: Изд. СПбГУ, 2005.
7. *Osipenko G. S.* Spectrum of a Dynamical System and AppliedSymbolic Dynamics // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2000. Vol. 252, № 2. P. 587–616.
8. *Романовский И. В.* Оптимизация стационарного управления дискретным детерминированным процессом динамического программирования // Кибернетика. 1967. № 2. С. 71–83.
9. *Osipenko G. S., Romanovsky J. V., Ampilova N. B., Petrenko E. I.* Computation of the Morse spectrum // Journal of Mathematical Sciences. 2004. Vol. 120, № 2. P. 1155–1166.
10. *Ампилова Н. Б., Петренко Е. И.* Об оценке энтропии символического образа динамической системы // Вестник СПб Университета. 2008. Сер. 10, вып. 3. С. 3–11.
11. *Брэгман Л. М.* Доказательство сходимости метода Г. В. Шелейховского для задачи с транспортными ограничениями // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1967. Т. 7, № 1. С. 147–156.
12. *Брэгман Л. М.* Релаксационный метод нахождения общей точки выпуклых множеств и его применение для решения задач выпуклого программирования // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1967. Т. 7, № 3. С. 620–631.

13. *Романовский И. В., Ампилова Н. Б., Петренко Е. И.* О максимизации энтропии при линейных ограничениях // Труды Международной научной конференции «Космос, астрономия и программирование (Лавровские чтения)». СПб.: Математико-механический факультет СПбГУ. 20–22 мая 2008. С. 181–185.
14. *Осипенко Г. С.* К вопросу об аппроксимации инвариантных мер динамических систем // Дифференциальные уравнения и процессы управления. 2008. № 2. с. 58–79.
15. *Ампилова Н. Б.* Стационарные процессы на графах и анализ изображений // Компьютерные инструменты в образовании. 2013. № 2. С. 31–36.
16. *Батюков А. М.* Анализ цифровых изображений, основанный на построении стационарного потока на графе // Вестник Санкт-Петербургского университета. Сер. 10. Прикладная математика, информатика, процессы управления. 2015. № 2. С. 115–122.
17. *Ampilova N. B., Sergeev V. D. Soloviev I. P.* On the method of digital image analysis based on the construction of a stationary flow on graph // Humanities and Science University Journal. 2016. № 22. P. 29–36.
18. *Сергеев В. Д.* Об оптимизации алгоритма построения стационарного потока на ориентированном графе // Компьютерные инструменты в образовании. 2017. № 2. С. 16–24.
19. *Hewings G. J. D.* Regional industrial analysis and development. London: Methuen & Co, 1977. 180 p.
20. *Hewings G. J. D., Madden M., eds.* Social and demographic accounting. Cambridge: Cambridge univ. press, 1995. 242 p. doi:10.1017/cbo9780511559860.
21. *Sonis M., Azzoni C. R., Hewings G. J. D.* The Three-sector Growth Hypothesis and the Euler-Malthus Economic growth model: Application to the analysis of GDP dynamics of Brazil, 1985–2004–2020 // Proc. of the 5th Int. Conf. on Mathematical Modeling and Computer Simulation of Materials Technologies. 2008. P. 153–163.
22. *Sonis M.* Discrete Non-Linear Probabilistic Chains (M. Drachlin and E. Litsyneds) // Functional-Differential Equations, Ariel, Israel, 2003, 10:445-487.
23. *Sonis M., Hewings G.* Regional Competition and Complementarity: Comparative Advantages / Disadvantages and Increasing / Diminishing Returns in Discrete Relative Spatial Dynamics // Regional Competition Advances in Spatial Science / P. Batey, P. Friedrich. Berlin: SpringerVerlag, 2001. P. 139–157.
24. *Hewings G. J. D. et al., eds.* Trade, networks and hierarchies: Modeling regional a. interregional economies. Berlin etc.: Springer, 2002. 467 c.
25. *Hewings G. J. D. et al., eds.* Understanding and interpreting economic structure. Berlin etc.: Springer, 1999. 370 p.
26. *Афанасьева Е. В.* Моделирование процессов потребления экономических ресурсов с помощью вероятностных цепочек (на примере стран Западной Европы) // Научно-технические ведомости СПбГПУ: Информатика. Телекоммуникации. Управление. 2011. № 3. С. 93–97.
27. *Афанасьева Е. В.* Моделирование процессов распределения ресурсов с помощью вероятностных цепочек // Дифференциальные уравнения и процессы управления. 2011. № 3. С. 1–54.
28. *Логинова Н. В.* Вероятностные цепочки с полиномиальным ростом как модель распределения ресурсов // Компьютерные инструменты в образовании. 2020. № 3. С. 56–69.
29. *Логинова Н. В.* Об одном методе моделирования динамики социально- экономических процессов // Компьютерные инструменты в образовании. 2018. № 2. С. 14–24.
30. *Логинова Н. В.* О вероятностных цепочках с полиномиальным ростом // Дифференциальные уравнения и процессы управления. 2022. № 3. С. 73–89.
31. *Меклер А. А.* Программный комплекс для анализа электроэнцефалограмм методами теории динамического хаоса // Автореферат дисс. к. т. н. СПб., 2006.
32. *Майоров О. Ю., Фенченко В. Н.* Вычисление корреляционной размерности и энтропии ЭЭГ сигналов на кластерных вычислительных системах // Клин. информат. и Телемед. 2014. Т. 10, вып. 11. С. 10–20.
33. *Меклер А. А.* Применение аппарата нелинейного анализа динамических систем для обработки сигналов ЭЭГ // Вестник новых медицинских технологий. 2007. Т. Xiv, № 1. P. 73–77.
34. *Николаева Д. А.* Применение метода оценки корреляционной размерности для анализа ЭЭГ человека с заболеванием эпилепсия // Дифференциальные уравнения и процессы управления. 2009. № 2. С. 43–51.
35. *Шпитонков М. И.* Вычисление корреляционной размерности для физиологических временных рядов // Труды ИСА РАН. 2020. Т. 70, № 2. С. 75–79.
36. *Ampilova N.* Nonlinear dynamics method in the application to the study of time series // Journal of Applied Electromagnetism. 2022. № 24(2). P. 9–18.
37. *Чумак О. В.* Энтропии и фракталы в анализе данных. URL: https://www.researchgate.net/publication/235247584 (online; accessed: 2022-04-05).
38. *Яновский Л. П. Филатов Д. А.* Анализ состояния финансовыхрынков на основе методов нелинейной динамики // Экономический анализ. 2005. № 17(50). С. 5–15.
39. *Kolamunna H. et al.* DronePrint: Acoustic Signatures for Open-set Drone Detection and Identification with Online Data // Proc. of the ACM on Interactive, Mobile, Wearable and Ubiquitous Technologies. 2021. Vol. 5, № 1. P. 1–31. doi:10.1145/3448115

40. *Kadomskii A.* On the application of the Grassberger-Procaccia algorithm to classification of quadcopter sounds // Proc. 17 Int. Conf. CEMA23, 3 Nov. 2023. Athens, Greece, 2023. P. 21–26.
41. *Ампилова Н., Кадомский А.* Методы нелинейной динамики в анализе сигналов / Сборник материалов Всероссийской конференции по естественным и гуманитарным наукам с международным участием, 21 ноября 2023 года. СПб., 2024 (в печати).

Поступила в редакцию 01.03.2024, окончательный вариант — 22.03.2024.

Ампилова Наталья Борисовна, канд. физ.-мат. наук, доцент, кафедра информатики, Математико-механический факультет, СПбГУ., ✉ n.ampilova@spbu.ru

Соловьев Игорь Павлович, канд. физ.-мат. наук, доцент, кафедра информатики, Математико-механический факультет, СПбГУ., soloviev@math.spbu.ru

Кадомский Андрей Андреевич, аспирант, кафедра информатики, Математико-механический факультет, СПбГУ., st099001@student.spbu.ru

Computer tools in education, 2024
№ 1: 5–17
http://cte.eltech.ru
doi:10.32603/2071-2340-2024-1-5-17

On Methods for Studying Dynamic Systems

Ampilova N. B.[1], Cand. Sc., Docent, ✉ n.ampilova@spbu.ru
Soloviev I. P.[1], Cand. Sc., Associate Professor , soloviev@math.spbu.ru
Kadomskij A. A.[1], Postgraduate, st099001@student.spbu.ru

[1]Saint Petersburg State University, 28 Universitetskiy pr., Peterhof, 198504, Saint Petersburg, Russia

Abstract

Wide application of dynamical systems resulted in designing many various methods for investigations, both analytical and computer-oriented ones. In this paper we consider methods based on ideas of symbolic dynamics, and discuss the application of dynamical systems for solving identification and prognosis problems.

The representation of the system dynamics by an oriented graph constructed in accordance with the system and a finite partition of the phase space gives a possibility to match trajectories paths on the graph. By this method one may construct approximation to invariant sets and invariant measures, and the Morse spectrum as well. Using dynamical systems in identification problems is considered on examples of probability chains for the modeling social and economic resource distribution, and the method of nonlinear dynamics for reconstruction of an attractor on a given time series.

Keywords: *dynamical systems, symbolic dynamics, symbolic image, Morse spectrum, invariant measures, stationary flow on a graph, Takens method, probability chains.*

Citation: N. B. Ampilova, I. P. Soloviev, and A. A. Kadomskij, “On Methods for Studying Dynamic Systems,” *Computer tools in education*, no. 1, pp. 5–17, 2024 (in Russian); doi:10.32603/2071-2340-2024-1-5-17

References

1. C. S. Hsu, *Cell-to-cell mapping. A method of global analysis for nonlinear systems*, *New-York: Springer-Verlag*, 1987.
2. M. Dellnitz and A. Hohmann, “A subdivision algorithm for the computation of unstable man ifolds and global attractors,” *Num. Math.*, vol. 75, pp. 293–317, 1997.
3. M. Dellnitz and O. Junge, “An adaptive subdivision technique for the approximation of attractors and invariant measures,” *Comput. Visual. Sci.*, vol. 1, pp. 63–68, 1998.
4. G. S. Osipenko, “O simvolicheskom obraze dinamicheskoi sistemy”[On the symbolic image of a dynamic system], in *Granichnye zadachi*, Perm, Russia: PNRPU, pp. 101–105, 1983 (in Russian).
5. F. Colonius, and W. Kliemann. The Dynamics of Control.Birkhauser, 2000.
6. G. S. Osipenko and N. B. Ampilova, “Vvedenie v simvolicheskii analiz dinamicheskikh sistem” [Introduction to Symbolic Analysis of Dynamical Systems], St. Petersburg, Russia: SPbSU, 2005 (in Russian).
7. G. S. Osipenko, “Spectrum of a Dynamical System and AppliedSymbolic Dynamics,” *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 252, no. 2, pp. 587–616, 2000.
8. I. V. Romanovskii, “Optimizatsiya statsionarnogo upravleniya diskretnym determinirovannym protsessom dinamicheskogo programmirovaniya” [Optimization of stationary control of a discrete deterministic dynamic programming process], no. 2, pp. 71–83, 1967 (in Russian).
9. G. S. Osipenko, J. V. Romanovsky, N. B. Ampilova, and E. I. Petrenko, “Computation of the Morse spectrum,” *Journal of Mathematical Sciences*, vol. 120, no. 2, pp. 1155–1166, 2004.
10. N. B. Ampilova and E. I. Petrenko, “Ob otsenke entropii simvolicheskogo obraza dinamicheskoi sistemy” [On estimating the entropy of a symbolic image of a dynamic system], *Vestnik SPb Universiteta*, ser. 10, no. 3, pp. 3–11, 2008 (in Russian).
11. L. M. Bregman, “Proof of the convergence of Sheleikhovskii’s method for a problem with transportation constraints,” *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, vol. 7, no. 1, pp. 191–204, 1967 (in Russian); doi10.1016/0041-5553(67)90069-9
12. L. M. Bregman, “Relaxation method for finding a common point of convex sets and its application to optimization problems,” *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, vol. 171, no. 5, pp. 1019–1022, 1966 (in Russian).
13. I. V. Romanovskii, N. B. Ampilova, and E. I. Petrenko, “O maksimizatsii entropii pri lineinykh ogranicheniyakh” [On entropy maximization under linear constraints], *Trudy Mezhdunarodnoi nauchnoi konferentsii "Kosmos, astronomiya i programmirovanie (Lavrovskie chteniya), SPb: Matematiko-mekhanicheskii fakul’tet SPbGU, 20–22 May 2008"* pp. 181–185, 2008 (in Russian).
14. G. S. Osipenko, “On the probjem of approximations of measures of dynamical systems,” *Differential Equations and Control Processes*, no. 2, pp. 58–79, 2008 (in Russian).
15. N. B. Ampilova, “Statsionarnye protsessy na grafakh i analiz izobrazhenii” [On entropy maximization under linear constraints Stationary processes on graphs and image analysis], *Computer tools in education*, no. 2, pp. 31–36, 2013 (in Russian).
16. A. M. Batyukov, “Digital images processing based on graph stationary flow construction,” *Vestnik S.-Petersburg Univ. Ser. 10. Prikl. Mat. Inform. Prots. Upr.*, no. 2, pp. 115–122, 2015 (in Russian).
17. N. B. Ampilova, V. D. Sergeev, and I. P. Soloviev, “On the method of digital image analysis based on the construction of a stationary flow on graph,” *Humanities and Science University Journal*, no. 22, pp. 29–36, 2016.
18. V. D. Sergeev, “On the Algorithm Optimization for Calculation a Stationary Flow on an Oriented Graph,” *Computer tools in education*, no. 2, pp. 16–24, 2017 (in Russian).
19. G. J. D. Hewings, *Regional industrial analysis and development*, London: Methuen & Co, 1977.
20. G. J. D. Hewings and M. Madden, eds., *Social and Demographic Accounting*, Cambridge University Press, 1995; doi:10.1017/cbo9780511559860
21. M. Sonis, C. R. Azzoni, and G. J. D. Hewings, “The Three-sector Growth Hypothesis and the Euler-Malthus Economic growth model: Application to the analysis of GDP dynamics of Brazil, 1985–2004–2020,” in *Proc. of the 5th Int. Conf. on Mathematical Modeling and Computer Simulation of Materials Technologies*, pp. 153–163, 2008.
22. M. Sonis and D. S. Dendrinos, “Socio-Spatial Dynamics and Discrete Non-Linear Probabilistic Chains,” *Tool Kits in Regional Science*, pp. 177–197, 2009; doi:10.1007/978-3-642-00627-2_7
23. Sonis M. “Discrete nonlinear probabilistic chains,” *Functional differential equations*, vol. 10, no. 3-4, pp. 593–639, 2003.
24. G. J. D. Hewings et al., eds., *Trade, networks and hierarchies: Modeling regional a. interregional economies*, Berlin etc.: Springer, 2002.
25. G. J. D. Hewings et al., eds., *Understanding and interpreting economic structure*, Berlin etc.: Springer, 1999.
26. E. V. Afanasyeva, “Nonlinear probabilistic chain-based modelling of the distribution of economic resources consumption (by the example of western european countries),” *Computing, Telecommunication, and Control*, no. 3, pp. 93–97, 2011 (in Russian).

27. E. V. Afanasyeva, "Probabilistic Chains Theory-Based Modelling of Socio-Economic Resources Distribution Processes," *Differential Equations and Control Processes*, no. 3, pp. 1–54, 2011 (in Russian).
28. N. V. Loginova, "Probability Chains With Polynomial Growth As a Model of Resource Distribution," *Computer Tools in Education*, no. 3, pp. 56–69, 2020 (in Russian); doi:10.32603/2071-2340-2020-3-56-69
29. N. V. Loginova, "On a method of modeling of socio-economic processes dynamics," *Computer Tools in Education*, no. 2, pp. 14–24, 2018 (in Russian); doi:10.32603/2071-2340-2018-2-14-24
30. N. V. Loginova, "On Probability Chains with Polynomial Growth," *Differential Equations and Control Processes*, no. 3, pp. 73–89, 2022 (in Russian).
31. A. A. Mekler, "Software package for the analysis of electroencephalograms using the methods of dynamic chaos theory," *Cand. Sc. diss., SPIIRAS, St. Petersburg, Russia*, 2006 (in Russian).
32. O. Yu. Mayorov et al., "Calculation of the correlation dimension and entropy of EEG signals in cluster computing systems," *Klinical Informatics and Telemedicine*, vol. 10, no. 11, pp. 10–20, 2014 (in Russian); doi:10.31071/kit2014.11.01
33. A. A. Mekler, "The Use of the Apparatus of Nonliner Analysis of Dynamic Systems for Data Processing of Electroencephalogram," vol. 14, no. 1, pp. 73–77, 2007 (in Russian).
34. D. Nikolaeva, "Applying the Method of the Correlation Dimension Evaluation to EEG analysis of Epileptic," *Differential Equations and Control Processes*, no. 2, pp. 43–51, 2009 (in Russian).
35. M. I. Shpitonkov,"The calculation of correlation dimension to physiological time series," *Proceedings of the Instittute for Systems Analysis Russian Academy of Sciences (ISA RAS)*, vol. 70. no. 2, pp. 75–79, 2020 (in Russian); doi:10.14357/20790279200209
36. N. Ampilova, "Nonlinear dynamics method in the application to the study of time series," *Journal of Applied Electromagnetism*, vol. 24, no. 2, pp. 9–18, 2022.
37. O. V. Chumak, *Entropies and fractals in data analysis*, Moscow: Sternberg Astronomical Institute Moscow University, 2010 (in Russian); doi:10.13140/2.1.4739.6800
38. L. P. Yanovsky and D. A. Filatov, "Analysis of the state of financial markets based on methods of nonlinear dynamics," *Ekonomicheskii analiz*, vol. 17(50), pp. 5–15, 2005 (in Russian).
39. H. Kolamunna et al., "DronePrint," in *Proc. of the ACM on Interactive, Mobile, Wearable and Ubiquitous Technologies*, vol. 5, no. 1, pp. 1–31, 2021; doi:10.1145/3448115
40. A. Kadomskii, "On the application of the Grassberger-Procaccia algorithm to classification of quadcopter sounds," in *Proc. 17 Int. Conf. CEMA23, 3 Nov. 2023, Athens, Greece*, pp. 21–26, 2023.
41. N. Ampilova and A. Kadomskii, "Metody nelineinoi dinamiki v analize signalov" [Nonlinear dynamics methods in signal analysis], in *Proc. of Vserossiiskaja konferentsiya po estestvennym i gumanitarnym naukam s mezhdunarodnym uchastiem, 21 Nov. 2023, St. Petersburg*, 2024 (in print).

Received 01-03-2024, the final version — 22-03-2024.

Natalia Ampilova, Candidate of Sciences (Phys.-Math.), Docent, Department of Computer Science, Faculty of Mathematics and Mechanics, SPbSU, ✉ n.ampilova@spbu.ru

Igor Soloviev, Candidate of Sciences (Phys.-Math.), Associate Professor, Department of Computer Science, Faculty of Mathematics and Mechanics, SPbSU, soloviev@math.spbu.ru

Andrey Kadomskij, Postgraduate, Department of Computer Science, Faculty of Mathematics and Mechanics, SPbSU, st099001@student.spbu.ru